Шифр: 11-18

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап
по математики
2019/2020
Ленинградская область

Район Сосновый Бор

Школа МБОУ „лицей № 8"

Класс 11 Б

ФИО Закутей
Егор Игоревич

Чистовик | лист 1/6 | 11-18

1	2	3	4	5	Σ
7	7	7	5	0	26

(2) Докажем от противного: пусть это не так:

тогда $n^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i$ и $n^2 = \sum_{i=1}^{n} b_i$

$a_i \in N\ \forall a_i$ и $b_i \in N\ \forall b_i$ причем $a_i \neq b_j$ при любых i и j =>

$2n^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$ ~~для a_i и b_i~~ =>

$2n^2$ = сумма $2n$ различных натур. чисел

минимальное значение такой суммы $\sum_{i=1}^{2n} (i) = \frac{2n(2n+1)}{2} =$

$= \frac{4n^2+2n}{2} = 2n^2 + n > 2n^2$ при $n > 0$ ~~против~~ =>

$2n^2 \neq \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$ – противоречие!

Докажем, что множество A может существовать:

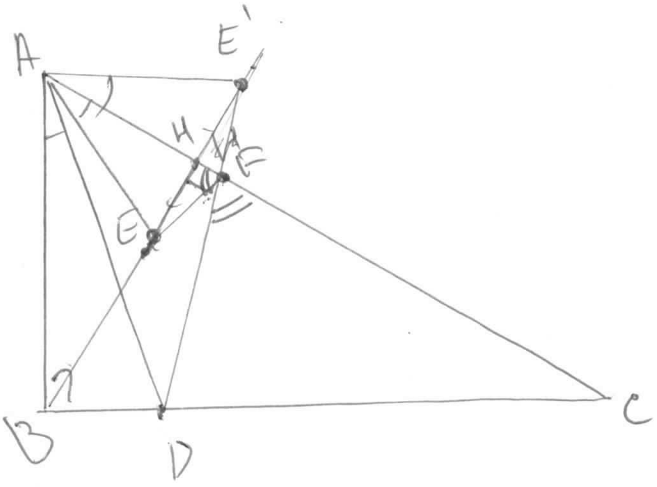
$\{A\} = \{1, 2, 3, \dots i \dots, n-2, n-1, \frac{n(n+1)}{2}\}$

$\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = n^2$

Пусть $\{B\} = \{A\}$ => есть такие $\{B\}$ и $\{A\}$, что найдётся число которое есть в обоих множествах и не может быть так, что все числа множеств различны ЧТД

Чистовик | лист 216 | 11-18

3)



Дано: $\angle BAD = \angle CAE$

$\angle AFE = \angle CFD$

$\triangle CAB$ - прямоуг

BH - высота

Док-ть: $\angle AEF = 90^\circ$.

Док-во:

Продолжим прямую BH и отметим точку E' симметричную точке E относительно прямой AC =>

$\triangle AEF = \triangle AE'F$ т.к. они симметричны относительно AC =>

$\angle E'AF = \angle CAE$ => $\angle DAE' = \angle BAC$ т.к.

$\angle DAE' = \angle DAF + \angle FAE'$ и $\angle BAC = \angle DAF + \angle BAD$ и

$\angle BAD = \angle CAE = \angle E'AF$

$\angle E'BD = \angle BAC$ т.к. $\angle E'BD = \angle HBC$ и BH - высота опущ из прямого угла =>

$\angle BAC = \angle E'BD = \angle E'AD$ => четырёхугольник $E'ABD$ можно вписать в окружность =>

$\angle ABD + \angle AE'D = \pi = \frac{\pi}{2} + \angle AE'D$ => $\angle AE'D = \frac{\pi}{2}$ =>

т.к. $\triangle AEF = \triangle AE'F$ $\angle AEF = \angle AE'F = \angle AE'D = \frac{\pi}{2}$

ЧТД

1) $77 = 1 \cdot 77 = 7 \cdot 11 = (-7)(-11) = (-1)\cdot(-77)$ - представить 77 в виде проязв целых можно только так =>

чтобы максимизировать n:

Два минимальных: -7 и -11 Два максимальных: $+7$ и $+11$

так же на доске могут быть числа от -6 до 6 включи

Если у нас два минимальных отличаются от -7 и -11 ещё

например -77 и -1 на доске не может быть чисел меньше

0. Если два максимальных отличаются от 7 и 11

например 77 и 1 на доске не может быть ещё чисел больше 0 $\Rightarrow$ предложенный вариант даёт максимальное n (иначе $n \le 11$)

$\Rightarrow$ на доске числа: $-11, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 11$

$n = 17$.

Ответ: $n = 17$.

(4) Пойдём от противного:

$yp+1 = ab \qquad a > y, \; b > y$

$\Rightarrow \; ap+1 > yp+1$ и $bp+1 > yp+1$

$\Rightarrow ap+1 > ab$ и $bp+1 > ab$

$a(p-b) > -1$ и $b(p-a) > -1$

$\Rightarrow b \le p$ и $a \le p \qquad a \ne p$ и $b \ne p$ т.к. $yp+1 \not\vdots\, p$

$\Rightarrow$ ~~$a \ne b$~~ $\quad 1 < a \le p \quad 1 < a < p \quad 1 < a < p$

$1 < b \le p \quad 1 < b < p \quad 1 < b < p$

Предположим, что $py_1 + 1 = ab$, $y_1 < a$ и $y_1 < b$

$py_2 + 1 = ac$, $y_2 < a$ и $y_2 < c$

$\Rightarrow py_1 + 1 \equiv py_2 + 1 \pmod a$

$p(y_1 - y_2) \equiv 0 \pmod a$ т.к. p - простое $y_1 - y_2 \equiv 0 \mod a$

$\Rightarrow$ какое-то из чисел y_1 или y_2 больше либо равно a

$\Rightarrow$ противоречие.

Чистовик | лист 4 '6

(4) Пусть мы нашли ~~y~~ числа y_1 и y_2 $\begin{pmatrix} y_1 < P/2 \\ y_2 < P/2 \end{pmatrix}$

такие что $py_1 + 1 = ab$ $\{a; b; c\} \in \mathbb{Z}$

$py_2 + 1 = ac$ и $a > y_1$ и $b > y_1$

a^2?

$a > y_2$ и $c > y_2$

т.е. представили в виде произведения двух чисел каждое больше y_1 (y_2). При чём число a встречается в обоих произведениях.

$\Rightarrow py_1 + 1 \equiv py_2 + 1 \pmod a \Rightarrow p(y_1 - y_2) \equiv 0 \pmod a$

$a \vdots p$?

т.к p-простое $y_1 - y_2 \equiv 0 \pmod a \Rightarrow$ одно из чисел больше a т.к. $y_1 \geq 1$ и $y_2 \geq 1$ $\Rightarrow$ противоречие т.к. a должно быть такое что $a > y_1$ и $a > y_2$.

~~Если мы представили $py+1$ в виде произведения чисел, каждое больше y, эти два числа уже не будут встречаться дальше $\Rightarrow$ Если у нас каждое число $py+1$ можно представить в виде произведения, которое соответствует условию и y принимает значение от 1 до $\frac{p-1}{2}$ всего~~

Из этого мы можем сделать вывод, что если мы для каждого $y \in \{1; 2; 3; \dots; \frac{p-1}{2}\}$ будем рассматривать число $yp+1$ и если это число можно представить в виде произведения целых чисел a и b при чём $a > y$ и $b > y$ будем выписывать на доску числа a и b. На доске все числа будут различны.

Пойдём от противного: пусть для каждого $y \in \{1; 2; 3; \dots; \frac{p}{2}$

~~Произведение~~ $yp+1$ ~~чистовик~~ можно представить в виде произведения чисел ~~больших y~~, каждое из которых больше y.
Тогда на доске $\left(\frac{p-1}{2}\right)\cdot 2$ чисел. (1)

$$\begin{cases} yp+1=ab \\ y<a \\ y<b \\ \{a,b\}\in\mathbb{Z}\end{cases} \quad \begin{cases} yp+1<ap+1 \\ yp+1<bp+1 \\ yp+1=ab\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ap+1>ab \\ bp+1>ba\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a(p-b)>-1 \\ b(p-a)>-1\end{cases} \Rightarrow$$

$p-b\geq 0$, $p-a\geq 0 \Rightarrow b\leq p$ и $a\leq p$

$b\neq p$ и $a\neq p$ т.к. $ap+1 \not\vdots\, p$ и $a\neq 1$, $b\neq 1$ т.к. $y\geq 1$

$\Rightarrow \begin{array}{l} 1<a<p \\ 1<b<p \end{array} \Rightarrow$ на доске числа от 2 до $p-1$ включительно

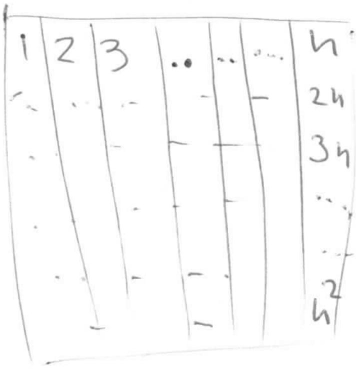
Т.к. мы доказали, что числа различны на доске максимум $(p-1)-2+1$ чисел. Т.е. $p-2$ чисел.
Но у нас получилось (1), что чисел $p-1$ $\Rightarrow$
Противоречие! $\Rightarrow$ найдётся $y<p/2$ что $py+1$ нельзя представить в виде произведения двух чисел, каждое из которых больше y. $\boxed{\text{ЧТД}}$

(Б) Пусть у нас большие числа это $n, 2n, 3n \ldots n^2$ а маленькие $1, 2, 3 \ldots n$. Тогда $A=\sum \text{больш} - \sum \text{мал} =$

$$= n\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n^2-1)}{2}$$

Приведём пример: Пусть a_{ij} – значение в i-й строке и j-м столбце $(i=1\ldots n,\ j=1\ldots n)$

$a_{ij}=j+n(i-1)$



Малые числа: $1, 2, 3 \ldots n$

Большие: $n, 2n, 3n \ldots n^2$.

Доказательства оптимальности нет :с

Ответ. $\frac{n(n^2-1)}{2}$.

Шифр: 2-11-02

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап
по математике
2019/2020
Ленинградская область

Район Сосновый Бор

Школа МБОУ „лицей №8"

Класс 11 Б

ФИО Закутей Егор Игоревич

Чистовик | лист 1 / 5 | 2-11-02

6	7	8	9	10	Σ
7	0	7	0	0	14

11.8

$\sin x + \cos y = p$, p – рациональное т.е. $p = \frac{m}{n}$, где $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $p > 0 \Rightarrow m > 0$

$\sin y + \cos x = q$, q – рациональное т.е. $q = \frac{r}{s}$, где $r \in \mathbb{Z}$, $s \in \mathbb{N}$, $q > 0 \Rightarrow r > 0$

~~$\cos y = p - \sin x$~~

т.к. $p > 0$ и $q > 0$ $m \in \mathbb{N}$ и $r \in \mathbb{N}$ т.к. $m > 0$, $r > 0$

$\cos y = p - \sin x$ и $\sin y = q - \cos x \Rightarrow$

$\cos^2 y = (p - \sin x)^2$ и $\sin^2 y = (q - \cos x)^2$ – переход равносилен, т.к. квадраты равных чисел равны независимо от знака

(1) $\cos^2 y = p^2 + \sin^2 x - 2p\sin x$, (2) $\sin^2 y = q^2 + \cos^2 x - 2q\cos x$

сложим

(1)+(2): $\underbrace{\cos^2 y + \sin^2 y}_{=1} = p^2 + q^2 + \underbrace{\cos^2 x + \sin^2 x}_{=1} - 2p\sin x - 2q\cos x$

по осн. триг тождеству

$\Rightarrow 1 = p^2 + q^2 + 1 - 2(p\sin x + q\cos x) \Rightarrow 2p\sin x + 2q\cos x = p^2 + q^2$

$\Rightarrow 2\frac{m}{n}\sin x + \frac{2r}{s}\cos x = \frac{m^2}{n^2} + \frac{r^2}{s^2} \quad \Big| \cdot (n^2 s^2)$

$\underline{2mns^2}\sin x + \underline{2rsn^2}\cos x = \underline{m^2 s^2 + r^2 n^2}$ т.к. $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{N}$

числа натуральные

ЧТД

(мин времени не то же самое, что мин в условии)

(11.7) ~~Пойдём от противного. Пусть это возможно. Пок Рассмотрим эту раскраску Число 2^k : $k \in N$ раскрашено в цвет (A) Тогда~~

(11.6) Допишем на доску разность $(x^2+1)-(x+1)=$

$= x(x-1)$. Далее допишем $(x^3+1)-(x^2+1)=$

$x^2(x-1)$. Допишем произведение $(x(x-1))\cdot(x^2(x-1))=$

$= x(x(x-1))^2$ - искомая ф-я

Докажем это:

$x>0 \Rightarrow \underset{>0}{x}\,\underbrace{(x(x-1))^2}_{\geqslant 0 \text{ всегда}} \Rightarrow x(x(x-1))^2 \geqslant 0$ - неотр знач.

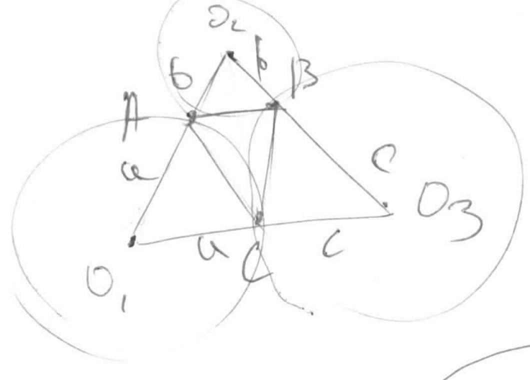
$x<0 \Rightarrow \underset{<0}{x}\,\underset{\geqslant 0 \text{ всегда}}{(x(x-1))^2} \Rightarrow x(x(x-1))^2 \leq 0$ - непол.

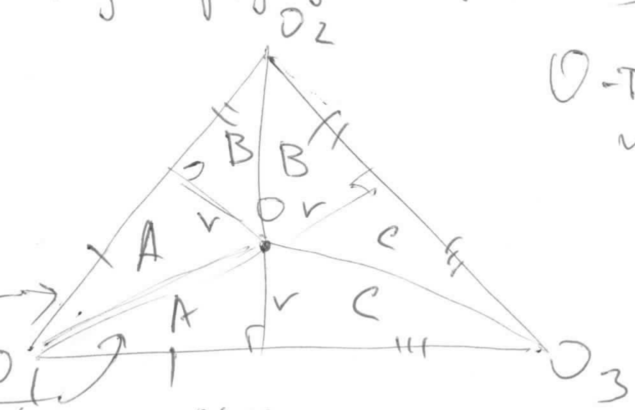
ЧТД.

(11.9) Пусть O_1, O_2 и O_3 - центры сфер.

Сечение в пл-ти $(O_1 O_2 O_3)$

Пусть радиусы сфер a, b, c.





O - точка пересеч биссектрис $\triangle O_1 O_2 O_3$

равны т.к. два катета равны => пл-ди равны

$O_1O_2 = a+b$, $O_2O_3 = \cancel{bc}\ b+c$, $O_3O_1 = \cancel{kc}\ a+c$ | Чистовик | $\frac{..}{3/5}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}r(a+c) = A+C \\ \frac{1}{2}r(c+b) = C+B \\ \frac{1}{2}r(b+a) = A+B \end{cases}$$ (A, B, C – площади Δ с рисунка) $\Rightarrow$ решая систему

$A = \frac{ar}{2}$, $B = \frac{br}{2}$, $C = \frac{cr}{2}$

$\Rightarrow$ Высоты треуг $O_1 O_{\cancel{2}} O_3$, O_1OO_2, O_2OO_3 ~~уд~~ из точки O делят стороны в отношении $a:c$, $a:b$ и

$b:c \Rightarrow$ точки A, B, C – точки касания впис ок-ти $\triangle O_1O_2O_3$. Заметим что биссектрисы $\triangle O_1O_2O_3$

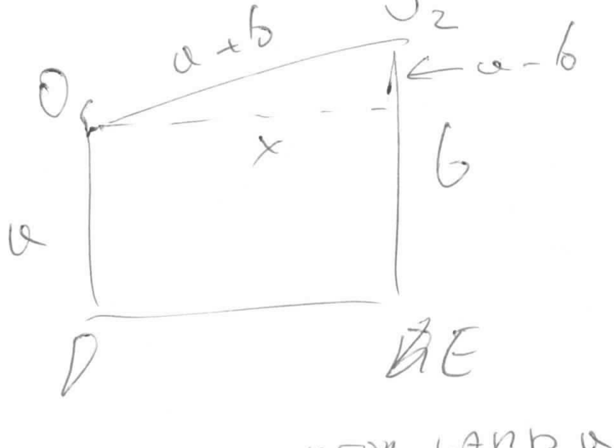
это серединные перпендикуляры $\triangle ABC$ (т.к. O_1AC – равнобедренный итд)

$\Rightarrow$ O – центр опис окр около $\triangle ABC$

$\Rightarrow$ ~~оп~~ вписанная окр $\triangle O_1O_2O_3$ совпадает с описанной около $\triangle ABC$.

$\triangle DEF$ имеет стороны $2\sqrt{ab}$, $2\sqrt{bc}$, $2\sqrt{ac}$

т.к.



$\Rightarrow x^2 = (a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$

$R = \frac{a}{2\sin\alpha}$ α – угол напр a – радиус впис окр..

Выводим, что:

$$\frac{R(DEF)}{R(\cancel{A}O_1O_2O_3)} = \frac{(abc)^2(a+b+c)4}{2(ab\cancel{c})(a+b+c) - a^2b^2 - b^2c^2 - a^2c^2)(a+b)(b+c)(a+c)}$$

$> 1 \Rightarrow R(DEF) > R(O_1O_2O_3)$

2-11-02

Чп | Чистовик | лист 4/5 | 2-11-02

~~Так что $R(DEF) > R(O_1O_2O_3)$~~
~~т.к. радиус окр-ти будет уменьшаться при~~
~~смещении точек A внутрь окр~~

$\Rightarrow R(DEF) > R(O_1O_2O_3) > r(O_1O_2O_3) = R(ABC)$

радиус впис окр
меньше радиуса
описанной

ЧТД

11.10 Докажем что за 6 ходов Вася не определит многочлен:

– на пл-ти 6 точек
через любые 3 можно
провести параболу

$\Rightarrow C_6^3$ вариантов.

$\Rightarrow$ Ответ: $n=7$.

11.7 Да, можно:

~~Пусть числа $2^{(2k+1)}-1$ имеют цвет A~~
~~числа $2^{(2k)}-1$ имеют цвет B $\forall k \in \mathbb{Z}, k \geq 0$~~
~~т.е. $k = 0, 1, 2, 3 \ldots$~~
~~$2^{2k_1+1}-1+2^{2k_2+1}-1 =$~~
~~$= 2(2^{2k_1}+2^{2k_2}-1)$ - не степень двойки т.к.~~

$2^{2k_1+1}-1+2^{2k_2+1}-1 = 2^n \Rightarrow$

Пусть число 1 имеет цвет A
Числа 2^k-1 имеют цвет B, $k = 2, 3, 4, \ldots$

Чистовик 5/5 | 2-11-02

$\Rightarrow 2^{k_1}-1+2^{k_2}-1 = \cancel{2^n} = \underbrace{11111}_{k_1 \text{ единиц}} + \underbrace{111111}_{k_2 \text{ единиц}} \neq 1\underbrace{0000}_{n \text{ нулей}}$

$\cancel{2^n - 2^{k_2} + 1 = 2^{k_1} - 1}$

т.к. ~~нет~~ $\underbrace{1111}_{k_1 \text{ единиц}} + \underbrace{1111}_{k_2-1 \text{ единиц}}0 + 1 = 1\underbrace{000}_{k_1 \text{ нулей}} + \underbrace{1111}_{k_2-1 \text{ единиц}}0$

$\Rightarrow$ единиц в записи суммы $> 1 \Rightarrow$ не степень двойки.

$\Rightarrow$ числа узета В не дают в сумме степень 2

Далее возьмём наш ряд: $1, 3, 7, 15 \ldots$
A B B B

~~и умножим на 2^n, $n=1,2,3\ldots$~~
~~таким образом мы покроем все числа~~
и итог: при умножении ряда на 2^n ~~и прибавлении 2^n~~ наши рассуждения останутся верными.